

# *Curso de enseñanza de la Matemática con asistencia del GeoGebra: incidencia en un alumno Mathematics teaching course with the assistance of GeoGebra: impact on a student*

**Carlos Manuel Hernández Hechavarría**

**Maikel Ariel Ramos Morales**

**Francisco Martínez Sánchez**

Universidad de Oriente, Cuba.

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-1016-6357>

<https://orcid.org/0000-0002-5612-1384>

<https://orcid.org/0000-0001-9678-3027>

**Correo electrónico (s):**

[carlosmhh@uo.edu.cu](mailto:carlosmhh@uo.edu.cu),

[mramos@uo.edu.cu](mailto:mramos@uo.edu.cu),

[martinez@uo.edu.cu](mailto:martinez@uo.edu.cu)

Recibido: 10/03/2022

Aceptado: 05/07/2022

**Resumen:** Atendiendo a dificultades en la enseñanza de la matemática y con el propósito de socializar experiencias que contribuyan a solucionarlas, se exponen aspectos esenciales del curso Enseñanza de la Matemática con asistencia del GeoGebra: consideraciones didácticas sobre ejercicios y problemas, impartido en la II Convención Internacional de la Universidad de Oriente. Con el empleo del método y enfoque investigativo en el desarrollo del curso se obtuvieron resultados positivos que se evidencian a partir de la incidencia en la motivación, desarrollo de la creatividad matemática y didáctica en un alumno para plantear y resolver problemas con asistencia del GeoGebra.

**Palabras clave:** Curso; GeoGebra; Enseñanza; Matemática; Método; Enfoque, Investigativo.

**Abstract:** Attending to difficulties in the teaching of mathematics and with the purpose of socializing experiences that contribute to solving them, essential aspects of the course Teaching of Mathematics with the assistance of GeoGebra are exposed: didactic considerations on exercises and problems, taught at the II International Convention of the University of the East. With the use of the method and investigative approach in the development of the course, positive results were obtained that are evidenced from the impact on motivation, development of mathematical and didactic creativity in a student to pose and solve problems with the assistance of GeoGebra.

**Keywords:** Course; GeoGebra; Teaching; Math; Method; Focus, Investigative.

## **Introducción**

La comunidad científica reconoce la existencia de diversos problemas en la enseñanza de la Matemática así como la necesidad de encontrar y socializar alternativas de solución, en esta dirección los cursos para docentes son vías loables para satisfacer dicha necesidad. En este

artículo se exponen aspectos esenciales del curso Enseñanza de la Matemática con asistencia del GeoGebra: consideraciones didácticas sobre ejercicios y problemas, impartido en la II Convención Internacional, Ciencia y Conciencia, de la Universidad de Oriente y, la incidencia en uno de los alumnos participantes que ilustra parte de su impacto.

Entre los antecedentes del curso y los contenidos que aborda, están diferentes investigaciones científicas y didácticas, análisis de la enseñanza de la matemática y sus resultados por directivos y docentes que señalan múltiples insuficiencias en la enseñanza de la matemática y la necesidad de incrementar la preparación matemática y didáctica de los docentes, además la escasa utilización de software de matemática dinámica en Cuba, situación que empieza a revertirse.

Otros antecedentes esenciales lo constituyen aportaciones didácticas de investigadores de diferentes países y particularmente las del primer autor de este artículo que distinguen la utilización del GeoGebra para diferentes áreas del conocimiento y niveles educativos en la última década, en las que se exponen nuevas y diversas consideraciones didácticas sobre ejercicios y problemas con la utilización del mencionado software.

El GeoGebra, software libre, va conquistando partidarios en las diferentes regiones geográficas y países que procuran el perfeccionamiento educacional en todos los niveles educativos, en este sentido Carrillo de Albornoz que:

... por diversas razones GeoGebra se está convirtiendo en un recurso TIC casi imprescindible en el aula. A las posibilidades que ofrece, hay que añadir su sencillez para comenzar a utilizarlo y sobre todo su continuo desarrollo, que hacen que en cada una de las nuevas versiones que aparecen, ofrezca nuevas opciones que hacen aumentar aún más su potencia y eficacia (2013, p. 1).

El curso impartido respondió a demandas realizadas al proyecto Gestión científica y de enseñanza – aprendizaje en el IPVCE santiaguero, financiado por el programa Sistema educativo cubano. Perspectivas de desarrollo, del Ministerio de Educación de Cuba. Como muestra de los impactos se muestran ejemplos de elaboraciones de problemas y aprendizajes de un participante en el curso, además observaciones realizadas por el profesor a dichas

elaboraciones que también impactaron positivamente. Finalmente se plantean interrogantes con vista a destacar y promover el trabajo diferenciado con los estudiantes, en particular en los Institutos Preuniversitarios Vocacionales en Ciencias Exactas.

## **Desarrollo**

El empleo del método y enfoque investigativo es beneficioso en todas las educaciones, se manifiesta, de manera particular, en los dos epígrafes que se desarrollan a continuación, es decir, en los aspectos esenciales del curso Enseñanza de la Matemática con asistencia del GeoGebra y la incidencia en uno de los alumnos participantes a partir de las elaboraciones del mismo que se presentan.

### **Aspectos esenciales del curso Enseñanza de la Matemática con asistencia del GeoGebra**

Se consideran aspectos generales esenciales del referido curso Enseñanza de la Matemática con asistencia del GeoGebra, los siguientes:

- El planteamiento y análisis de consideraciones didácticas sobre ejercicios y problemas.
- La utilización del método y enfoque investigativo en la enseñanza – aprendizaje.
- Las posibilidades informáticas e internet para la búsqueda y profundización en los contenidos y ejemplos que aborda el curso.
- El carácter abierto para continuar intercambiando con el pesor del curso en distintos momentos aprovechando las nuevas tecnologías de la información y comunicaciones.
- Mostrar algunas experiencias de la utilización del GeoGebra en la última década en Santiago de Cuba

Entre los artículos comentados para ejemplificar la utilización del GeoGebra en la última década en Santiago de Cuba o de los cuales se extrajeron fragmentos están Acercamiento a una concepción para el desarrollo de actividades investigativas escolares: un ejemplo en la primaria” (Hernández y Palma, 2011) y Actividad investigativa escolar y ejercicios en matemáticas: “El papalote” (Hernández y González, 2015), estos centran la atención en la utilización del enfoque investigativo y el GeoGebra, en el segundo además se destaca la preparación de docentes en la utilización didáctica del software.

Para la educación media y fines didácticos fue distinguido el artículo “Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones (Hernández, 2013), pues en los textos y en la práctica escolar, estas temáticas generalmente se han tratado de manera independiente, sin adecuados vínculos entre ellas.

Los artículos Ejercicios geométricos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra: ejemplos y observaciones didácticas (Hernández, 2017) y Problemas a partir de un problema de Olimpiada Internacional de Matemática. Propósitos y consideraciones didácticas (Hernández, 2018) muestran una variedad de transformaciones de ejercicios y problemas atendiendo a consideraciones didácticas de gran utilidad para atención a las necesidades y potencialidades de los alumnos.

En los artículos Aprovechamiento didáctico del GeoGebra en ejercicios sobre tangencias de una esfera y un cono: dos ejemplos (Hernández y Acosta 2018) y Construcción de un octógono con sus vértices en los lados de un cuadrado: ejemplos y consideraciones didácticas (Hernández y Yero 2021), se muestran interesantes posibilidades constructivas y didácticas que posibilita el GeoGebra.

En estos artículos se destacan entre otros aspectos los siguientes:

- Tendencias constructivas de figuras
- Determinación de vías y procedimientos de solución de ejercicios y problemas
- Fundamentos matemáticos
- Integración coherente de contenidos
- Visualización geométrica
- Dificultades diagnosticadas en docentes para la transformación de ejercicios y problemas
- Transformación de ejercicios y problemas. Análisis de variantes de ejercicios, vías de solución y tratamiento didáctico

Entre las exigencias más importantes a considerar en problemas geométricos se precisan:

- Orden constructivo.
- Construcción de dos o más figuras relacionadas (por la ubicación de puntos de una en la otra, por la relación entre lados u otros elementos).
- Construcción de dos o más figuras relacionadas que tengan un dinamismo independiente, (al mover una la otra se mantiene fija, manteniendo las relaciones esenciales entre ellas) a partir de puntos u otros elementos que no necesariamente pertenecen a alguna de las figuras.
- Ubicación de vértices, lados y otros elementos en el plano.
- Determinación de longitudes de lados, amplitudes de ángulos y/o áreas.
- Visualización estática o dinámica de elementos de una o varias figuras.
- Elaboración de hipótesis a partir de visualizaciones dinámicas.
- Encontrar y explicar diferentes vías o variantes de solución que considere interesantes.
- Carácter abierto (parcial o total) del problema: no tienen soluciones únicas.

Señalan posibles clasificaciones para las transformaciones de ejercicios y problemas:

- Atendiendo a los datos según:
  - Su ajuste a los datos del problema: los contempla todos, a una parte de ellos, incorpora datos adicionales que lo particularizan, combina parte de los dados con datos adicionales que no guardan estrecha relación con los primeros.
  - La forma de presentación de los datos: no contempla representación gráfica, incluye representación gráfica con mayor o menor calidad (atendiendo a elementos, tamaño, colores, líneas continuas y discontinuas, etc.), en formato digital con posibilidades dinámicas o no.
- Atendiendo a las exigencias, pueden ser, en sentido general: mayores, iguales o menores a las planteadas en el problema según:
  - Tiempo disponible para realizarlo.
  - Medios disponibles o exigidos para resolverlos.

- Conocimientos y habilidades previas de los escolares.
- Cantidad y profundidad de las transformaciones u operaciones a realizar.
- Posibilidad o no de trabajar en equipos.
- Ayuda que pudieran recibir.
- Fuentes que puedan consultar.
- Sistema de calificación u otras razones que pueden incidir en la estimulación, el resultado o desempeño de los escolares.

Los criterios antes expuestos no agotan los aspectos y posibles clasificaciones, solo ilustran la posibilidad de su realización; pudieran plantearse otras clasificaciones que ponderen determinados aspectos, por ejemplo, que pongan en primer plano los medios o recursos informáticos dada las alternativas y ventajas dinámicas que ofrecen.

Asimismo quedan pendientes otros aspectos sobre la enseñanza-aprendizaje con enfoque investigativo creativo y buenas prácticas con sustentos expuestos por (Cisneros y otros, 2021) que pueden contribuir al perfeccionamiento educacional cubano desde cursos para docentes y la práctica escolar.

### **Incidencia del curso en un alumno**

Para ejemplificar la positiva incidencia del curso, con el empleo del método y enfoque investigativo, se muestra una parte de los problemas y criterios elaborados por un alumno, que evidencian una favorable incidencia en su motivación, desarrollo creativo y didáctico atendiendo a sus conocimientos y habilidades previas, las que sirven, como punto de partida para nuevas observaciones por el profesor del curso.

Luego de señalar que el GeoGebra permite resolver problemas con mayor facilidad, en comparación con vías tradicionales con lápiz y papel que resultan engorrosas y de difícil comprensión; así como destacar la posibilidad visualizar gráficamente la resolución de los mismos, permitiendo un aumento considerablemente del entendimiento de objetos y conceptos matemáticos abstractos, propone un problema con incisos que van aumentando el

nivel de complejidad del contenido matemático, teniendo en cuenta algunas exigencias de problemas geométricos que transitan por diferentes niveles educativos o guardan relaciones.

Problema: Sea la función  $f(x)=3-x^2$ :

- Representala gráficamente en un sistema de coordenadas rectangulares y seleccione un punto M cualquiera ubicado en el primer cuadrante que pertenezca a la función dada.
- Por el punto M trace dos rectas paralelas a los ejes coordenados Ox y Oy de tal forma que se intersequen con los mismos, en los puntos B y A respectivamente.
- Determine las coordenadas del punto M que hace que el rectángulo OAMB tenga mayor área.

La solución del primer inciso, presentada en el gráfico 1, es fácil para estudiantes de la enseñanza secundaria o media superior, en Cuba desde el octavo grado se comienza a estudiar la teoría de funciones y en 9no grado se estudian las propiedades, ecuaciones y representación gráfica de la función cuadrática.

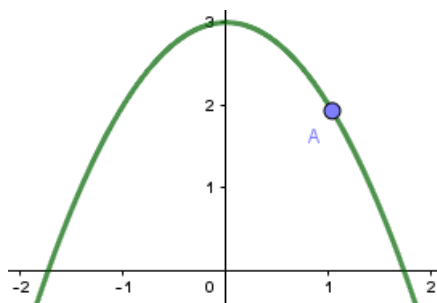


Gráfico 1: Representación  
Fuente: Elaboración propia

En este inciso se pueden aprovechar las potencialidades que brinda para sistematizar conceptos tales como: sistemas de coordenadas rectangulares, ejes coordenados, origen de coordenadas, cuadrantes, determinación de puntos en el plano, relación de posición entre rectas en el plano, función cuadrática y pertenencia de un punto a una función. La sistematización de estos conceptos asegura las bases el próximo inciso del ejercicio.

Para resolver el segundo inciso se necesita mayor cantidad de conocimientos y habilidades, sobre definiciones y conceptos tales como rectas paralelas y puntos de intersección, además

un nivel mayor de interpretación por su enunciado y denotación de puntos, nótese que el término “respectivamente” hace que se denote por B, la intersección con el eje Oy, y por A la intersección con el eje Ox.

Mediante un intercambio con los alumnos es posible contribuir al desarrollo de su pensamiento lógico planteándoles exigencias de dinamismo de la construcción, que permita variar parámetros, incluso en alumnos de secundaria. Puede aprovecharse la ocasión para relacionar el contenido de la Teoría sobre funciones con la Geometría Plana, para propiciar el redescubriendo de elementos comunes entre ambas ramas de la Matemática, el estableciendo de inferencias y analogías de tal manera que el estudiante integre conocimientos matemáticos.

El inciso c es de mucha mayor complejidad con relación a los anteriores, generalmente aparece en los primeros años de carreras universitarias de ingeniería o ciencias técnicas y es conocido en las Matemáticas como “Problemas de optimización”, en los cuales se requiere de herramientas importantes, tales como el Cálculo Diferencial del Análisis Matemático, para darle solución.

Para resolverlo sin la utilización del cálculo diferencial, alumnos aventajados pudieran tener la idea de realizar sucesivamente cálculos para distintas posiciones del punto M, pero sería una vía extremadamente laboriosa e ineficiente con un gasto de tiempo enorme, por tanto se parte de esta situación problemática para introducir el uso del GeoGebra a partir de las posibilidades de dinamismo que ofrece para mover puntos y mostrar cálculos de manera dinámica

En dicho software se hace uso de una herramienta importante que son los deslizadores, los cuales permiten dinamismo en la figura representada. Dicha herramienta puede garantizar el movimiento del punto M a lo largo de la función  $f(x)$  limitado en el primer cuadrante, y a su vez permite que se vaya transformando el rectángulo OAMB conjuntamente su área. Con esta vía de solución solo se necesita inspeccionar cuál será el máximo valor del área al mover el deslizador que contiene al punto. A modo de ejemplo se muestran varias vistas en el gráfico

2

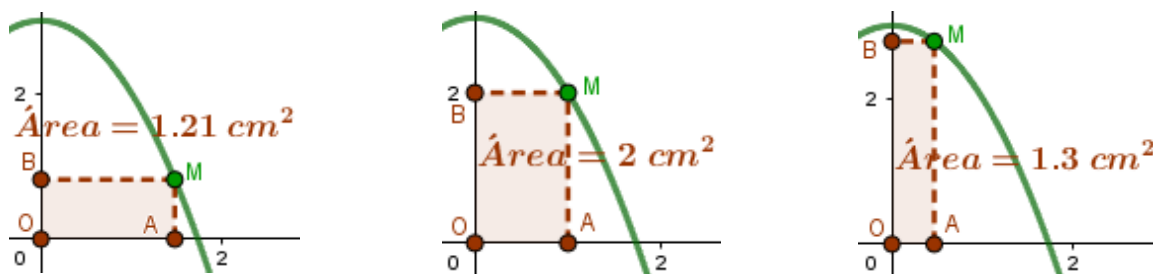


Gráfico 2: Varias vistas  
Fuente: Elaboración propia

### Observaciones realizadas por el profesor del curso

El problema planteado por el alumno, con incisos que van aumentando significativamente el nivel de complejidad y las consideraciones expuestas, junto a criterios de lo aprendido en el curso denota no solo la positiva incidencia del curso en su aprendizaje, también su interés cognoscitivo y muy buenas potencialidades creativas.

Con el propósito de ilustrar la dinámica del curso se muestran algunas interrogantes y observaciones realizadas por el profesor del curso a partir del problema, soluciones y consideraciones ofrecidas por el alumno, que propiciaron un intercambio muy fructífero acerca de la posibilidad de obtener vías y soluciones correctas con la asistencia del GeoGebra para resolver determinados problemas, también sobre algunos errores o escaso aprovechamiento de las facilidades que ofrece el software para analizar las vías y soluciones.

Con respecto a la vía de solución utilizada para solución del ultimo inciso cabe preguntarse: ¿sólo se necesita inspeccionar cuál es el máximo valor del área al mover el deslizador que contiene al punto?, ¿No existen distintas posiciones del punto M que muestren como área  $2 \text{ cm}^2$ ?, ¿Cuál es la causa de que para distintas posiciones de M se muestre que el área es la misma?, ¿Cómo puede ilustrarse con asistencia del GeoGebra, que para algunas posiciones de M, puedan reflejarse distintas áreas?, las interrogantes anteriores pueden explicarse a partir de los dominios numéricos, de la densidad del conjunto de los números reales y la opción de redondeo del GeoGebra.

El gráfico 3 es exactamente igual a la figura central del gráfico 2, y por tanto tienen la misma área, sin embargo muestran áreas diferentes, esto está dado por el redondeo de los valores,

una con dos cifras decimales y otra con 5. De esta explicación surge otra interrogante importante, ¿Para cuáles coordenadas de M, el cambio de redondeo no modifica el área que se visualiza?

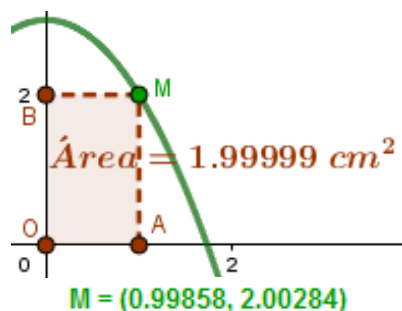


Gráfico 3

Fuente: Elaboración propia

Una última interrogante que merece atención de la cual pueden derivarse otras interrogantes importantes para los docentes ¿Considera necesario y/o conveniente aprovechar problemas como el planteado en el último inciso para promover la investigación por estudiantes aventajados de la educación preuniversitaria en Cuba acerca de la resolución de problemas de optimización utilizando el cálculo diferencial u otros contenidos?, ¿Qué tratamiento didáctico convendría darle a problemas como estos en los IPVCE de Cuba?

## Conclusiones

Los aspectos esenciales de carácter general y específicos planteados en el curso responden a demandas teórico - prácticas de la enseñanza de la Matemática en consonancia con el tercer perfeccionamiento educacional que se desarrolla en Cuba. La socialización de dichos aspectos y orienta a docentes para su estudio, tomar ejemplos y realizar nuevas aportaciones con creatividad que inciden favorablemente en su preparación matemática y didáctica. Los argumentos y evidencias mostradas avalan la concepción y resultados de curso.

## Referencias Bibliográficas

Carrillo de Albornoz, A. (2013). *Otras matemáticas son posibles con GeoGebra*. IV Congreso Internacional de Ensino da Matemática (págs. 1-3). Rio Grande do Sul: ULBRA. <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/2155/970>

- Cisneros, S.; Hernández, C.M.; Aranda, B.L.; Céspedes, A.; Vinent, M.V. (2021) *Concepciones y buenas prácticas en didácticas particulares*. Editorial: “Universo Sur”. Universidad de Cienfuegos. <https://allspace.ucf.edu.cu/index.php/s/d7BnZbsqtx9za8a>
- Hernández, C. M. (2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. *Números. Didáctica de las Matemáticas*, 82, p. 115-129. <http://www.sinewton.org/numeros>
- Hernández, C. M. (2017). Ejercicios geométricos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra: ejemplos y observaciones didácticas. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 4(3), p. 1-32. <https://www.dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/index.php/dilemas/article/view/34/610>
- Hernández, C. M. (2018). Problemas a partir de un problema de Olimpiada Internacional de Matemática. Propósitos y consideraciones didácticas. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 5(2), p. 1-28. <https://www.dilemascontemporaneoseducacionpoliticayvalores.com/index.php/dilemas/article/view/56/452>
- Hernández, C. M. y Acosta, T. (2018) Aprovechamiento didáctico del GeoGebra en ejercicios sobre tangencias de una esfera y un cono: dos ejemplos. *Transformación*, 14(2), p. 226-235. <https://revistas.reduc.edu.cu/index.php/transformacion>.
- Hernández, C. M. y González, O. (2015). Actividad investigativa escolar y ejercicios en matemáticas: El papalote. UNIÓN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 42, 95-113. <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/42/42>.
- Hernández, C. M. y Palma, L. (2011) Acercamiento a una concepción para el desarrollo de actividades investigativas escolares: un ejemplo en la primaria. *Cuadernos de Educación y Desarrollo* (3) 28. <http://www.eumed.net/rev/ced/28/hhps.htm>

Hernández, C., & Yero, F. (2021). Construcción de un octógono con sus vértices en los lados de un cuadrado: ejemplos y consideraciones didácticas. *Transformación*, 17(3), p. 428-439. <https://revistas.reduc.edu.cu/index.php/transformacion/article/view/e3634>