
El Geogebra y las habilidades profesionales en la disciplina Matemática Superior I

The Geogebra and professional skills in the discipline Higher Mathematic I

Félix Reinaldo Sosa Begué

Rafael Osvaldo Paredes Pupo

Adonay Silva Salazar

Universidad de Guantánamo, Cuba.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4508-1786>

<http://orcid.org/0000-0001-7416-1008>

<http://orcid.org/0000-0003-4260-9191>

Correo electrónico:

reinaldob@ucp.gu.rimed.cu

rafaelop@cug.co.cu

adonays@cug.co.cu

Recibido: 10/03/2021

Aceptado: 15/07/2021

Resumen: Este trabajo ofrece una alternativa para facilitar el desarrollo de las habilidades profesionales en la Matemática Superior I en los estudiantes de la carrera de Física a partir del uso del Geogebra como herramienta práctica que facilita la comprensión del concepto derivada apelando a la noción geométrica intuitiva, o sea las representaciones y las imágenes que están presente como medio para aprender. Con la intención de organizar el proceso enseñanza aprendizaje se ofrece algunas consideraciones relacionadas con la forma de implementar esta alternativa. Finalmente proponemos algunas tareas relacionadas con la derivada para desarrollar con la ayuda del Geogebra.

Palabras clave: Habilidades Profesionales; Matemática Superior I; Geogebra; Derivada.

Abstract: This work offers an alternative to facilitate the development of professional skills in Higher Mathematics I in students of the Physics career from the use of Geogebra as a practical tool that facilitates the understanding of the derived concept by appealing to the intuitive geometric notion, that is, the representations and images that are present as a means to learn. With the intention of organizing the teaching-learning process, some considerations related to how to implement this alternative are offered. Finally we propose some tasks related to the derivative to develop with the help of Geogebra.

Keywords: Professional abilities; Superior Mathematics I; Geogebra; Derivative.

Introducción

En la Educación Superior los profesionales de este nivel siguen encargados de dirigir el proceso educativo y en particular el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática Superior I, donde los estudiantes de este nivel en su formación debe tener como principal característica que lo distinga la integridad como exigencia de la práctica, la que debe

evidenciarse en un desempeño competente ante la solución de los diferentes problemas profesionales que plantea la educación de la personalidad de ellos, donde las facilidades que ofrecen los asistentes matemáticos, en particular el Geogebra potencien su proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

La existencia de dificultades por parte de los estudiantes para auto gestionar su aprendizaje con utilización del Geogebra y las insuficiencias que muestran en su desempeño para dirigir este proceso son observables en la utilización práctica de estas herramientas.

Los resultados de investigaciones que se desarrollan en la Universidad de Guantánamo, y los obtenidos en otras universidades (Ramírez, Rodríguez, & Benítez, 2021) (Valdés, Mendieta, & Martínez, 2019) (Toto & Borges, 2016), y Beltrán P. (2002-2012), entre otros confirman limitaciones de los estudiantes en el desempeño competente durante la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Estas propuestas se centran en destacar que el proceso de enseñanza- aprendizaje necesariamente tiene que encontrarse en constante perfeccionamiento.

Entre las principales deficiencias encontradas en diferentes observaciones hecha en el desempeño de estudiantes y egresados de la carrera y las causas que las originan están relacionan con:

La búsqueda, procesamiento, implementación en la solución de problemas profesionales y la comunicación independientes de información que complemente y actualice su caudal de conocimientos.

- Las habilidades profesionales para dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, con un enfoque sistémico, problémico, investigativo y comunicativo, que propicie además que este sea activo, significativo, regulado y motivador para los estudiantes.

A estas cuestiones se suma que las acciones realizadas por los estudiantes al enfrentar los problemas profesionales, no están motivadas por el sentido que para ellos tiene realizarlas; su incapacidad para reaccionar ante situaciones del contexto no previstas; la no manifestación de interés y motivación profesionales, entre otros elementos que son rasgos

característicos de las habilidades que necesita el estudiante para desempeñarse profesionalmente.

Los documentos rectores como el modelo del profesional, los programas de disciplina y asignaturas que expresan explícitamente la necesidad de adquirir conocimientos y de formar habilidades, capacidades, valores y convicciones determinados a partir de objetivos son los principales elementos que en estrecha relación deberían hacer posible el crecimiento de los estudiantes en su desempeño profesional del profesor de Matemática.

Entre otras cuestiones el modo de actuación del profesional se concreta en el desenvolvimiento del estudiante durante la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática, este desempeño debe favorecerse desde la formación inicial el desarrollo y evaluación de habilidades profesionales. Un acercamiento a este proceso se logra desde la gestión de las habilidades profesionales con el uso de los asistentes matemáticos particularmente con el Geogebra en la disciplina Matemática Superior I, de manera que se facilite el desempeño profesional de los estudiantes. Por tanto, es un propósito gestionar habilidades profesionales en la disciplina Matemática Superior I con el uso del Geogebra, o sea obtener un proceso que permita identificar, definir y autenticar las habilidades profesionales, y establecer alternativas para su formación, desarrollo y evaluación.

En la disciplina Matemática Superior I se trabaja con contenidos que incluyen temas complejos de las funciones de una variable como lo de: límite, continuidad, derivadas, integrales, entre otros, etcétera, en los que las dificultades conceptuales son muy grandes, en una situación de aprendizaje tan compleja como la que tiene lugar para los estudiantes de esta disciplina, resulta conveniente favorecer el desarrollo de habilidades profesionales usando el Geogebra, conociendo que ellos mediante la visualización permiten definir nuevas relaciones y operaciones en los objetos matemáticos.

El estudio del cálculo diferencial es precedido por el estudio de las funciones elementales, sus propiedades y sus respectivos gráficos, permitiendo a los estudiantes se familiaricen con este tema fundamental de la matemática actual y esencial en la formalización de concepto de límite, derivada e integrales.

La presentación del concepto de derivada de una función en un punto como la recta tangente a la curva que representa la función en ese punto y la determinación de su pendiente, apela a la noción geométrica intuitiva. Geométricamente, puede ser vista una recta secante aproximándose a la recta tangente a la curva. La representación visual en este caso está relacionada con la representación simbólica del límite del cociente incremental (cuando h tiende a cero), o sea $(f(x+h) - f(x)) / h$. de este modo el concepto de derivada es construido sobre la intuición e imágenes que los estudiantes tienen de la pendiente de una recta, tasa de variación, límite, secantes y tangentes, estos conceptos pueden ser discutidos en el sentido de comprender como es que los estudiantes construyen el concepto de derivada de una función y sus aplicaciones mediante su gráfica utilizando del Geogebra, además en este trabajo se sugiere que se tenga en cuenta las consideraciones siguientes para la implementación de la alternativa.

- 1.- Asumir o adecuar los diferentes pasos utilizando desde el comienzo del tratamiento de los nuevos conceptos la combinación de variadas formas de representación, según el nivel de conocimientos previos que posee el estudiante, pero de manera que prime el uso del Geogebra.
- 2.- Seleccionar los conceptos adecuados dentro de cada tema que pueden ser tratados, esto garantiza una sistematicidad en el uso del Geogebra y por tanto da la posibilidad al estudiante de generar las imágenes mentales necesarias que favorezcan un enriquecimiento de su memoria gráfica en relación con el concepto, Resulta improductivo el uso del Geogebra solamente de forma esporádica.

Desarrollo

El uso del Geogebra puede resultar una alternativa para la formación de habilidades profesionales en la formación de la carrera Física, pues evita acercamientos formalizados que impiden una comprensión y asimilación adecuados, de lo que se trata, es de abrir espacios de significación al estudiante y este en su rol pueda desempeñarse concretando sus conocimientos acerca de los fenómenos cognitivos relacionado con los conceptos que se estudian en el análisis matemático en la consolidación del conocimiento.

El Geogebra permiten una representación gráfica intuitiva del límite, sucesiones, derivada y otros conceptos importantes para la Matemática Superior I, gráficas que inexorablemente conducirá a una elaboración pre conceptual de los conceptos antes mencionados por un lado coincidiendo plenamente con (Asprilla, Restrepo, & Arcilla, 2015), y por otro, según la teoría de (Tall & Vinner, 1981) se potencian en un alto grado elementos esenciales de las imágenes gráficas dando posibilidad al estudiante en la creación de fuertes marcos referenciales, los que pueden ser utilizados más adelante en el procesamiento de la información verbal. Según estas ideas, el acercamiento al concepto se produce en una forma de representación semiótica (representaciones cartesianas), de acuerdo a la naturaleza del concepto de Derivada, es necesario transferir a todas las formas posibles de representación, especialmente a la simbólica - analítica que es la que permite la aproximación definitiva al concepto. Al emplear de entrada sólo medios visuales evidentemente se impone la “inducción” como operación lógica en el proceso, aunque en cierto momento y nivel se combine con pasos deductivos imprescindibles en la formación del concepto teórico. ¿Cuáles son las fases por las que debe transcurrir este proceso?

En este proceso de adquisición de habilidades profesionales con el uso del Geogebra permite evidenciar los cambios y transformaciones que sufre el gráfico, ofreciendo al estudiante una idea completa de lo que ocurre, en tal sentido, (Ballester, 1992) que al valorar la intuición viva como fundamento del conocimiento destaca que la misma sirve como base para las abstracciones y como base para la formación de hipótesis y la búsqueda de suposiciones, permitiendo modelar el tránsito del conocimiento de lo concreto a lo abstracto en tal sentido podrían seguirse los pasos siguientes.

En el plano sensorial: del objeto real, al modelo del objeto y de ahí al trazado intuitivo.

En el plano racional: de la representación gráfica, a la descripción y de esta a la definición o fórmula.

En el plano racional entre la representación gráfica y la descripción, debe existir una fase intermedia donde se refleje la acción del sujeto sobre los objetos, el tránsito de la descripción a la definición, tal vez sea la más importante en el proceso de elaboración del conocimiento.

Para la gestión de las habilidades profesionales proponemos a continuación cinco pasos que permitirá el uso de los asistentes matemáticos.

Primer paso: Operación con las curvas o gráficos.

Segundo paso: Determinación de rasgos esenciales en una curva determinada.

Tercero paso: Descripción

Cuarto paso: Evaluación del proceso

Quinto paso: Conversión o cambio de representación.

En el primer paso, al estudiante le son presentados los objetos visuales (curvas o gráficos que representen la pendiente de una recta, tasa de variación, límite, secantes y tangentes, etc.) junto con un sistema de tareas, que les permita operar con ellos en la dirección adecuada, la resolución de las tareas le dan la posibilidad al estudiante de ir diferenciando un comportamiento geométrico, es decir, explorar y encontrar regularidades en el comportamiento de las curvas (gráficos de funciones). Hay que tener en cuenta que, en este proceso, las derivadas escogidas son conocidas, de ahí el empirismo prevaleciente en el camino de la elaboración del concepto, por otra parte, el estudiante al enfrentarse a las tareas se puede ver sometido a obstáculos generados por sus preconcepciones o el conjunto de imágenes formados a partir de sus experiencias, cuestión que el docente debe tener en cuenta al momento de proyectar el sistema de tareas.

El segundo paso decide la primera meta importante, discernir las regularidades geométricas en relación con el problema planteado, esta separación de regularidades en el comportamiento geométrico la identificaremos como determinación de rasgos esenciales del objeto, ósea, grafico de funciones, derivadas, pendiente, tasa de variación, limite, secantes y tangentes entre otras representaciones, este paso es decisivo, pues significa la determinación de las relaciones entre la derivada, la curva y los comportamientos distintivos de ella, que la hacen satisfacer o no una propiedad geométrica determinada, esta separación es el paso de abstracción necesario en la búsqueda de las propiedades.

En el tercer paso hay que precisar si lo que se quiere es caracterizar una relación geométrica o si el objeto de la indagación es una relación numérica asociada al comportamiento

geométrico, si es una relación numérica, entonces se debe realizar una descripción de la relación numérica en términos geométricos, asumiendo como descripción conceptual la definición dada por (Guétmanova, 1989), que precisa que “ la descripción consiste en enumerar los rasgos exteriores del objeto con el fin de distinguirlo de los objeto parecidos a él. La descripción ofrece una imagen sensitiva palpable del objeto, que el hombre puede componer mediante una representación creadora o reproductora. La descripción incluye indicios tanto sustanciales o como insustanciales”. En este paso hay que tener en cuenta que se amplía de manera significativa el conjunto de rectas y curvas, es decir, se hace una generalización del comportamiento investigado, no sólo se tienen en cuenta las curvas particulares, las rectas tangentes, el análisis de su declive, las distintas formas de determinar esta relación trabajadas por el estudiante sino se incluyen ahora “todas las curvas que cumplen la relación descrita”. Por tanto, cabe preguntarse ¿qué ha elaborado el estudiante? La descripción que se realiza es en el plano puramente geométrico, se ha definido una relación geométrica. Pudiera pensarse que en esta descripción (que se hace en el lenguaje natural) se produce una conversión, pero este no es el caso, pues en la Matemática Superior I para la carrera Física en particular tienen que darse simultáneamente las representaciones de figuras y la del lenguaje natural.

El cuarto paso es el que indica si el proceso ha sido efectivo o no en lo que se refiere a la elaboración conceptual y por tanto decide si este se repite o si se continúa con el siguiente paso.

El momento de conversión o cambio de representación (transferencia al plano analítico-simbólico) significa el cambio a otros tipos de representación del objeto o la relación descrita, y que presupone establecer la definición formal del concepto, este paso debe realizarse después de un período de tiempo suficientemente amplio de adiestramiento, que haga que el estudiante identifique con seguridad las diferentes unidades significantes en el registro de representación de partida, ya que en esta última fase es decisiva para la ganancia conceptual una coordinación exacta de los registros de representación y con ello que las unidades significantes del registro de llegada se correspondan con los del de partida, en

otras palabras, cada propiedad geométrica se debe corresponder o con un parámetro en la forma algebraica, o con un símbolo lógico en la expresión formalizada, etcétera.

Este enfoque de la elaboración conceptual se corresponde con las ideas fundamentales de la Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales (Talízina, 1988). La etapa materializada de la acción se amplía lo suficiente teniendo en cuenta la necesidad de presentar una buena cantidad de objetos singulares que permita una indagación lo más completa posible de las regularidades a descubrir.

Sugerimos que para la implantación de estos pasos se tengan en cuenta algunas consideraciones relacionadas con la forma de implementarla.

1.- Asumir o adecuar los diferentes pasos utilizando desde el comienzo del tratamiento de los nuevos conceptos la combinación de variadas formas de representación, según el nivel de conocimientos previos que posee el estudiante, pero de manera que prime el uso del Geogebra.

2.- Seleccionar los conceptos adecuados dentro de cada tema que pueden ser tratados, esto garantiza una sistematicidad en el uso del Geogebra y por tanto da la posibilidad al estudiante de generar las imágenes mentales necesarias que favorezcan un enriquecimiento de su memoria gráfica en relación con el concepto, Resulta improductivo el uso del Geogebra solamente de forma esporádica.

3.- Realizar un diagnóstico, donde se valore:

- Las habilidades que tienen los alumnos en la construcción de gráfico de las funciones elementales, las que se estudian en la Matemática Superior I, trascendente o de aquellas definidas por ramas en las que se utilicen varios de los gráficos ya señalados.
- Las habilidades en la determinación de la derivada de diferentes funciones, el análisis las rectas tangente, secante, tasa de variación, otros conceptos relacionados con el mundo de la física y además la interpretación gráfica de estos hechos.
- Las diferencias que existen en los estudiantes en la generación de imágenes gráficas.
- Las preferencias afectivas de los estudiantes por los procedimientos visuales o algebraicos.

- Las habilidades en la lectura de gráficos cartesianos.
- Las habilidades de los estudiantes en la utilización del Geogebra que facilitan la representación gráfica de la derivada.

4.- Después de la descripción conceptual, proponer a los estudiantes una colección de ejercicios (pendiente de una recta y su monotonía, tasa de variación media, derivada de una función en un punto, derivada en un punto a partir de la función derivada), con el objetivo de cumplimentar momento denominada evaluación.

Se propone un sistema de tareas con la intención de profundizar en el mismo, se fundamenta en los criterios establecidos por (Garcés, 1997) y (Concepción, 1989), tanto en la concepción de la tarea docente como para el propio sistema.

Las tareas que se conciben y aplican son los gráficos de las funciones estudiadas en la Matemática Media Superior, estas se escogen porque son los idóneos para la búsqueda de las regularidades geométricas propias de la noción de límite y las derivadas.

Sistema de tareas.

El sistema de tareas que se propone contiene ejercicios que están relacionados con el concepto de derivada de una función, declive de una recta y su monotonía, tasa de variación media derivada y derivada en un punto a partir de la función derivada. Destaquemos que el estudiante puede utilizar diferentes estrategias en el desarrollo de las actividades, estrategia geométrica, analítica o mixta, estas con ayuda del Geogebra, es importante tener en cuenta el análisis de la pendiente como un indicador de la inclinación de la recta, mostrando que se posee alguna imagen mental gráfica en la cual aparece la recta con una determinada posición en relación con los ejes coordenados, también como una tangente trigonométrica, como característica especial de los ángulo que la recta forma con el semieje positivo y el análisis a partir de la relación de dependencia entre el incremento de las dos variables. El apoyo que ofrece el Geogebra facilita la comprensión de la conexión que se establece entre estos conceptos.

Sistema de Tareas

1- A partir de los puntos A (0; -4), B (5; 6), los puntos C (2; 0), B (4,5; 5)

a) Representa el gráfico de la función

b) Determine la pendiente cuando x aumenta 3 unidades. ¿Cuánto aumenta y ?

c) Relacione la pendiente de la recta con la monotonía de la función.

d) ¿Cuál es la pendiente de una recta paralela al eje x ? justifique.

e) ¿Y si la recta fuera paralela al eje de las y ?

2- Representa gráficamente, utilizando el Geogebra la función $f(x) = 2x+1$.

a) Calcule la tasa de variación media en los intervalos $[0,2]$ y $[-3, -1]$.

3 - Representa gráficamente la función $f(x) = e^x$.

a) Calcule la tasa de variación media en el intervalo $[-2,0]$ y $0, -2]$.

4 - Compare los resultados obtenidos en las dos preguntas anteriores y relaciones con el crecimiento de la función.

5- Represente gráficamente la función $f(x) = \frac{-1}{4(x-1)(x-9)}$

a) Determina la pendiente de la recta tangente a la curva de f en el punto $p_0(1, 0)$.

Considere un punto $P(5,4)$ sobre la curva.

b) Trace la recta secante que pasa por los puntos P_0P .

c) La pendiente de la secante es.....

d) Imagine que el punto P se mueve sobre la curva y se aproxima al punto P_0 . Determine las sucesivas pendientes de las rectas secantes.

e) ¿Podemos afirmar que la pendiente a la curva en el punto $(1, 0)$ es 2?

6-Utilizando el Geogebra representa la función $f(x) = |x^2 - 4|$

a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P_0(2, 0)$, considerando un punto móvil $(3, 5)$ a la derecha de P_0 y un punto móvil

$P(1, 3)$ a la izquierda de P_0 .

b) ¿Qué concluye de los resultados obtenidos?

c) Existe límite del cociente $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ cuando $x \rightarrow 2$?

$$7 - \text{Considere la función } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Trazar la recta tangente a la curva en el punto (0, 0) considerando el punto móvil a la derecha de 0.

- a) ¿Qué valores se obtienen para la pendiente al mover la recta?
- b) ¿Qué sucedería si el punto se moviera hacia la izquierda del punto inicial?
- c) ¿Existe tangente a la curva de f en ese punto?
- d) ¿Cuál es el valor de la derivada en el punto
- e) Represente gráficamente la función $g(x) = (x - 1)^3 + 2$ y a su función derivada
- f) Determine $g'(0)$, $g'(1)$, $g'(2)$

Conclusiones

El uso del Geogebra en la disciplina Matemática Superior I puede constituir una alternativa para el desarrollo de habilidades profesionales en la formación de los profesionales de la carrera Física, pues evita acercamientos formalizados que impiden una comprensión y asimilación adecuados de los conceptos que se tratan en esta disciplina.

Los contenidos que se imparten en la disciplina Matemática Superior I incluyen temas complejos como lo de: límite, continuidad, derivadas, integrales, etcétera, en los que las dificultades conceptuales son muy grandes, que por la situación de complejidad que presentan estos contenidos, la utilización Geogebra favorece el desarrollo de habilidades profesionales, en tal sentido la visualización permite definir nuevas relaciones y operaciones en los objetos matemáticos.

Este artículo considera algunos pasos a tener en cuenta en la utilización del Geogebra para desarrollar habilidades profesionales, a partir de tener en cuenta la visualización que permite definir nuevas relaciones y operaciones en los objetos matemático, a partir de la formación en los estudiantes de nuevo marcos referencial en la adquisición de nuevos contenidos. Se propone un sistema de tareas docentes mediante el cual se corroboran los elementos teóricos.

Referencias Bibliográficas

- Asprilla, Y. C., Restrepo, K. Y., & Arcilla, C. E. (2015). La comprensión del concepto de derivada mediante el uso de Geogebra como propuesta didáctica. *RECME*, 1(1).
- Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática* (Tomo I). Pueblo y Educación.
- Guétmanova, A. (1989). *Lógica*. Moscú: Progreso.
- Ramírez, S. L., Rodríguez, L. E., & Benítez, E. M. (2021). Usos innovadores del software Geogebra en la enseñanza de la matemática. *Varona* (72).
- Talízina, N. (1988). *Psicología de la Enseñanza*. Progreso.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Toto, M., & Borges, T. C. (2016). El software Geogebra en el tratamiento de funciones en una institución de la República de Angola. *Varela*, 16(44).
- Valdés, E. A., Mendieta, J. F., & Martínez, J. L. (2019). El Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Conrado*, 15(70).