Desempolvando métodos matemáticos sobre la divisibilidad de números naturales

Lic. Ramón Rodríguez Águila

Lic. Mireya de los Ángeles Falcón Vega

Lic. Inés María Trotman González

RESUMEN

En este material se hace una recopilación de métodos para determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números naturales dados; se analizan cada uno señalándose sus ventajas y desventajas y se destaca uno como el más racional porque el algoritmo de trabajo es más sencillo. Además se somete a la consideración de estudiantes y docentes el método abreviado para la determinación del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de números naturales dados. .

Palabras Clave: Enseñanza de la Matemática, Método Matemático.

Los principios generales de la divisibilidad son una consecuencia del desarrollo que había alcanzado la teoría de los números. Los hindúes, por ejemplo llegaron a conocer la divisibilidad por tres, siete y nueve. Griegos y egipcios, establecieron la clasificación de los números en pares e impares. El genial matemático francés Blas Pascal (1 623 - 1 662), propuso las reglas para determinar la divisibilidad por cualquier número.

En el siglo IV (a.n.e.), Euclides, un genial griego, logró reunir los principales conocimientos matemáticos de su época. Todo lo relacionado con la Aritmética, lo expuso en los libros VII, VIII, IX y X de sus "Elementos". Entre los curiosos datos aritméticos que se encuentran en esa portentosa obra, aparece el método de resolución del máximo común divisor, que hoy llamamos divisiones sucesivas. No se olvidó Euclides en sus "Elementos" de ofrecer un método para la resolución del mínimo común múltiplo, de dos números. Para resolver el mínimo común múltiplo, Euclides propuso la siguiente regla: "El producto de dos números dividido entre el máximo común divisor de ambos números, da el mínimo común múltiplo".

En la actualidad se emplean diferentes métodos para determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números, pero a los estudiantes se les hace difícil trabajar con algunos de ellos por lo que este material tiene la intención de mostrar cuál resulta más racional.

Antes de ilustrar los métodos se hace necesario abordar algunas cuestiones que están íntimamente ligadas a los mismos y que permiten tener una visión más clara de lo que se propone.

La divisibilidad es la parte de la Aritmética que tiene por objeto averiguar las condiciones que debe reunir un número para ser divisible por otros. En la Escuela Primaria Cubana se comienza a tratar la divisibilidad desde el primer ciclo, cuando se introduce la operación de división.

La división es una de las operaciones aritméticas que tiene como significado general y abstracto ser la operación inversa de la multiplicación porque dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de ellos (divisor) tenemos que hallar el otro factor (cociente).

8 * 3 = 24

multiplicador multiplicando producto

24 : 8 = 3

dividendo divisor cociente

La división como operación de cálculo tiene sus limitaciones o restricciones en el dominio de los números naturales; su realizabilidad se limita a los casos en que el dividendo es múltiplo del divisor (el divisor siempre tiene que ser diferente de cero); en estos casos estamos en presencia de una división exacta, con resto cero, o sea, sin resto. Los casos en los cuales el dividendo no es múltiplo del divisor, son divisiones inexactas o con resto; además, los casos aquellos en que el dividendo es un número natural menor que el del divisor, tampoco son realizables en N.

En el caso de las divisiones exactas el dividendo es divisible por el divisor.

En el dominio de los números naturales un número b es divisible por un número natural a cualquiera, cuando existe un número natural x que multiplicado por a sea igual a b.

a | b ???? x ? N ; a . x = b (a ? 0).?

El estudio de la división y de la divisibilidad se inicia en el segundo grado de la Escuela Primaria; por lo que se hace necesario que los alumnos adquieran los conceptos de factor, divisor, múltiplo y divisible.

En segundo grado cuando se introduce la multiplicación, los alumnos aprenden que tanto el multiplicando como el multiplicador se les llama factores del producto y que un número es factor de otro cuando interviene en una multiplicación cuyo producto es el número dado. Aprenden a determinar o a hallar todos los factores de un número dado.

El concepto divisor lo adquieren cuando se estudia la división como operación inversa de la multiplicación, en la cual nos dan el producto de dos factores y uno de los factores para hallar el factor desconocido; el cual se halla dividiendo el producto entre el factor conocido.

2*x =8 8 /2 x = 8:2 4

x =4

El producto se transforma en dividendo; el factor conocido , en divisor y el cociente es el factor desconocido. De esta manera el alumno comprende que entre los factores y los divisores de un número cualquiera existe una relación: que los factores y los divisores de un número, son los mismos; por lo que para hallar los divisores de un número, basta con hallar sus factores y viceversa.

Desde segundo y hasta quinto grados se estudian las reglas de divisibilidad por 2,3,5, 10, 100, 1000; mientras que en sexto grado se dedica un epígrafe del capítulo relacionado con lo números naturales para repasar: los factores, divisores y múltiplos de un número natural, a la vez que se introducen los conceptos de números primos y compuestos, así como los procedimientos correspondientes para hallar los divisores y los múltiplos de números dados y la descomposición en factores primos. Se introduce el concepto de mínimo común múltiplo y se dan a conocer los procedimientos de simple inspección y el de la descomposición en factores primos para determinar el mínimo común múltiplo de números naturales dados; pero no se incluye el estudio del máximo común divisor, lo cual resulta ilógico ya que este conocimiento se aplica en la simplificación de fracciones.

En sexto grado se define como múltiplo de un número natural al número que se obtiene multiplicándolo por un número natural cualquiera, y se destaca que el conjunto de los múltiplos de un número natural tiene infinitos elementos que incluyen al cero y al propio número.

A partir de la determinación de los múltiplos comunes a varios números dados se da a conocer el concepto de mínimo común múltiplo de dos o más números naturales como el menor de los múltiplos comunes que sean diferentes de cero.

En el libro de texto de 6. grado aparecen explicados los métodos para hallar el mínimo común múltiplo:

Mínimo común múltiplo.
1.- Método directo
Se basa en la determinación de cierta cantidad de múltiplos a varios números dados, destacando los múltiplos comunes y la selección del menor de estos diferente de cero.
Ejemplo: Escribe el conjunto M2 de los 8 primeros múltiplos de 2 y el conjunto M4 de los 6 primeros múltiplos de 4.

M2= {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}

M4= {0, 4, 8, 12, 16, 20}

El conjunto formado por los elementos comunes de dos o más conjuntos, se llama conjunto intersección.

M2 Ç M4 = {0, 4, 8, 12}

Se destaca que en ese conjunto intersección hay un elemento distinto de cero que es el menor de todos ellos. En este caso particular , es el 4 y se denomina mínimo común múltiplo entre 2 y 4.
¿Cuál es la importancia didáctico-metodológica de este método?
El empleo de este método facilita la adquisición del concepto de mínimo común múltiplo porque el alumno se percata que existen infinitos múltiplos comunes, que resulta imposible determinar el mayor; pero que sí es posible determinar el menor de ellos, excluyendo el cero que es múltiplo de todo número.
2.- Método por simple inspección
Otro de los métodos que se aplica en la Escuela Primaria para determinar el mínimo común múltiplo de varios números es el llamado "por simple inspección".

Ejemplo. Hallar el mínimo común múltiplo de 2, 4 y 8 por simple inspección.

En este ejemplo el docente hace ver a los alumnos que:

- no puede haber ningún múltiplo de 8 que sea menor que 8 porque el menor múltiplo de todo número es el propio número.
- que el 2 y el 4 están contenidos en el 8, por lo que 8 es múltiplo de 2 y 4 . Por tanto 8 es el mínimo común múltiplo de 2, 4 y 8.

Ejemplo: Hallar el mínimo común múltiplo de 2, 4, y 6 .

En este ejemplo el docente también hace ver que:

- no puede haber ningún múltiplo de 6 que sea menor que 6.
- que el 6 contiene al 2 pero no contiene al 4.
- Buscamos un múltiplo consecutivo de 6; 12.
- Como el 12 contiene al 2 y al 4, es el mínimo común múltiplo de 2, 4 y 6.

¿Cuál es la importancia de este método ?. ¿Cuándo se aplica?

La importancia de este método radica en la facilidad de su aplicación cuando los números son pequeños o resulta evidente o fácil la aplicación de los caracteres de divisibilidad entre los números dados.

Se destaca que para hallar el mínimo común múltiplo de números primos entre sí, se halla su producto. Ejemplo

Hallar el m c m (5; 24) = 5 . 24

= 120

Pero cuando son números grandes y se pueden descomponer, fácilmente en factores primos se utiliza:

3.-El método de descomposición en factores primos

Este método, como su nombre lo indica, consiste en:

- Descomponer cada uno de los números dados en factores primos
- Expresar los factores primos como producto de potencias,
- Seleccionar los factores comunes y no comunes elevados a su mayor exponente.
- Determinar el cálculo del producto indicado, el cual es el mínimo común múltiplo de los números dados.

Ejemplo: Determinar el mínimo común múltiplo de 72, 18 y 60.

El número buscado debe tener como factores primos a todos los factores de los números dados, en este caso: 2^3, 3^2, 2, 3^2, 2^2, 3 y 5; pero como buscamos el menor múltiplo basta tomar:

- a 2^3 pues contiene a 2 y a 2^2,
- a 3^2 pues contiene a 3,
- a 5,

luego el mínimo común múltiplo se forma multiplicando los factores destacados.

Se escribe: m c m (72; 18; 60) = $2^3 . 3^2 . 5$

= 360

luego el mínimo común múltiplo se forma multiplicando los factores destacados.

Se escribe: m c m (72; 18; 60) = 23. 32. 5

= 360

y se resume en un recuadro la sucesión de pasos (regla) para determinar el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales: Para hallar el mínimo común múltiplo de varios números se halla el producto de los factores primos, comunes y no comunes elevados a su mayor exponente.

Esta regla práctica que resume el método de descomposición en factores primos para determinar el mínimo común múltiplo de varios números naturales dados es de gran utilidad cuando el alumno la ha adquirido conscientemente, porque tiene bien definido el concepto de múltiplo; pero la práctica, la experiencia y los resultados de diagnósticos y pruebas realizadas a alumnos e incluso al personal docente en ejercicio y los cursos regulares y de recalificación, en cuyos programas de estudio se incluye además de este contenido, el relacionado con el máximo común divisor, nos ha mostrado que se conocen las reglas; pero no las aplican consecuentemente ante una situación determinada, porque las confunden. En el caso de los alumnos de 6. grado al aplicar la regla, seleccionan indistintamente los factores inadecuadamente,. por ejemplo los de mayor exponente o solamente los factores comunes, y los estudiantes de la carrera de Maestros Primarios confunden la regla de máximo común divisor con la del mínimo común múltiplo.

Tomando en consideración el problema planteado, que se extiende al máximo común divisor, se hizo una búsqueda bibliográfica en la cual se analizaron, diferentes métodos para hallar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor; los que se relacionan a continuación.

Métodos para hallar el mínimo común múltiplo.

- Método directo.
- Método por simple inspección.
- Mínimo común múltiplo por el máximo común divisor.
- Método por descomposición en factores primos.
- Método abreviado.

Métodos para hallar el máximo común divisor

- Método directo.
- Método por simple inspección.
- Máximo común divisor mediante divisiones sucesivas.
- Máximo común divisor por descomposición en factores primos.
- Método abreviado.

4.- Método abreviado.

Para aplicarlo se colocan los números dados y al lado derecho se traza una línea vertical y se van dividiendo todos los números por su menor divisor primo el cual se va escribiendo al lado derecho de la línea vertical. Lo mismo se hace con los cocientes hasta lograr que todos los cocientes sean 1 (uno).

El producto de todos los divisores primos que quedan al lado derecho de la línea vertical es el mínimo común múltiplo.

Ejemplo: Hallar el m.c.m. (72, 18, 60) por el método abreviado.

72	18	60	2	
36	9	30	2	
18	-	15	2	
9	-	-	3	
3	3	5	3	m c m (72, 18, 60) = 2. 2. 2. 3 .3 .5
1	1	-	5	
		1		$= 2^3 . 3^2 = 360$

Ventajas de este método

No resulta necesario memorizar la regla que actualmente emplean los alumnos; pues el mínimo común múltiplo es el producto de los divisores que aparecen relacionados a la derecha de la línea vertical.

Máximo común divisor.

1.-Método directo

Hallar el m. c. d. (6, 12, 18) por el método directo.

6	12	18
6	12	18
2	4	6
3	6	9
1	3	3
	2	2
	1	1

Se colocan los números dados sobre una línea horizontal. Se procede a hallar todos los divisores de cada número por parejas de factores cuyo producto respectivo se coloca debajo de cada número dado; o sea, qué número multiplicado por 1 da 6? – El 6. Escribimos 6 y 1, dejando una separación entre ellos para escribir los demás factores (divisores). ¿Qué número multiplicado por 2 da 6? _ El 3. Escribimos 2 y 3. ¿Qué número multiplicado por 3 da 6? El 2. Como ya están consignados ambos como factores, ahí termina la búsqueda. De igual manera se hallan todos los divisores (buscándole los factores) a 12 y a 16

Se destaca que hay números que son divisores a la vez de todos los números dados, los cuales decimos que son divisores comunes.

Se selecciona el mayor de los divisores comunes el cual es el máximo común divisor, en este caso es 6.

Ventajas de este método.

Mediante la aplicación de este método se logra una correcta adquisición del concepto de máximo común divisor lo cual facilita el aprendizaje.

2.- Por simple inspección.

El método directo se recomienda para introducir el concepto de máximo común divisor; pero no es un métodos práctico.

Ejemplo: Hallar el m c d (4, 8, 16) por simple inspección.

Como los alumnos han aprendido en clases anteriores que el mayor divisor de todo número es el propio número, analiza que de los tres números dados el único que puede dividir a los demás es el 4, porque si escoge el 8, comprueba que divide a 8 y a 16 pero no divide a 4 y como 4 divide a 4, 8 y 16, es el m c d de los números dados.

Ejemplo: Hallar el m.c.d. (6, 9, 12) por simple inspección.

Para determinar el máximo común divisor, en este caso se comienza la búsqueda a partir del número 6 porque como es el menor, es el que puede dividir a los demás.

- 6 divide a 12 pero no divide a 9.

- Hallamos un divisor de 6. (6 : 2 = 3; la mitad de 6 es 3)

  3 divide a 9 y divide a 12; por tanto 3 es el máximo común divisor de 6, 9 y 12.

Ventajas

Resulta un método muy práctico cuando los números dados son pequeños (o grandes que a golpe de vista resulte fácil su aplicación).

3.- Método de descomposición en factores primos.

Después de hallar los factores primos de cada uno de los números dados y haberlos expresado como producto de potencias, se seleccionan los factores (bases) comunes elevadas a su menor exponente:

Ejemplo: Hallar el m c d (48, 60, 72)por el método de descomposición en factores primos.

Ejemplo: Hallar el máximo común divisor de 72, 18 y 60 por el método abreviado.

4.- Método abreviado.

Para determinar el máximo común divisor de varios números dados por el método abreviado, se escriben los números dados y al lado derecho una línea vertical. Se dividen todos los números al mismo tiempo por el factor primo común.

Los cocientes se van dividiendo también por el factor primo común hasta que estos sean primos entre sí.

El máximo común divisor es el producto de los factores primos que aparecen al lado derecho de la línea vertical.

$$\begin{array}{ccc|c} 72 & 18 & 60 & 2 \\ 36 & 9 & 30 & 3 \\ 12 & 3 & 10 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ m\,c\,d\,(72, 18, 60) = 2 \,.\, 3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; = 6 \end{array}$$

Ventajas de este método.

- No es necesario aprender ni dominar la regla, por lo que no tiende a confundirse con el mínimo común múltiplo.

- En la solución de algunos problemas de máximo común divisor ahorra operaciones de cálculo.

Ejemplo. Dos cintas de 36 m y 48 m de longitud se quieren cortar en pedazos iguales que tengan la mayor longitud posible.¿Cuál será la longitud de cada pedazo. ¿Cuántos pedazos se sacarán de cada cinta?

La longitud de cada pedazo será de 12 m. De la cinta de 36 m se podrán obtener 3 pedazos y de la de 48 se obtendrán 4 pedazos. Si se aplicaran otros métodos, para determinar la cantidad de pedazos habría que dividir la longitud de cada cinta por el máximo común divisor.

Con la aplicación de este método para hallar, tanto el máximo común divisor como el mínimo común múltiplo, se logra que los alumnos eliminen la confusión de las reglas que se aplican actualmente, para seleccionar los factores que dan lugar al mínimo común múltiplo y al máximo común divisor; por lo que la aplicación del mismo resulta menos complicada, más práctica, abreviada y racional.

BIBLIOGRAFÍA

1.- BALDOR, AURELIO. Aritmética Elemental Cultural. -- / S.L. : s.n., s.a./

2.- LAURENCE, RIDGE. Mathscope 3. – Canadá : Ed. Ontario, 1986.

3.-Matemática : séptimo grado. -- 2 ed. – La Habana : Ed. Pueblo y Educación, 1971.

4.-ROSELL, SÓCRATES. Matemática. -- / S. L. : s.n., s.a./

5.-RUIZ DE UGARRIO, GLORIA. Como enseñar Aritmética en la escuela primaria. – La Habana : Ed. Nacional de Cuba, 1965.