EduSol, ISSN: 1729-8091. Vol.15, No.52, jul.-sep., 2015, pp.16-26. Universidad de Guantánamo, Cuba

El tratamiento de significados en situaciones didácticas de aprendizaje del Álgebra

M.Sc Deisy Moya-Ricardo, Profesor Auxiliar
e-mail: deisy@cug.co.cu
M.Sc Marcia de las Mercedes Zamora-Pellicier, Asistente
e-mail: mzamora@cug.co.cu
Institución: Universidad de Guantánamo
Provincia: Guantánamo, País: Cuba
Fecha de recepción: diciembre de 2014
Fecha de aceptación: mayo de 2015

RESUMEN

Se analiza el nivel de habilidades algebraicas alcanzado por los estudiantes que ingresan a la carrera Matemática - Física de la Universidad de Guantánamo, sobre la base de las representaciones que ellos poseen acerca de variables, ecuación y sus respectivos conceptos. Se tratan cuatro situaciones didácticas del dominio del Álgebra: utilización de los símbolos provistos de su significado, uso de los términos algebraicos dotados de su significado, cálculo algebraico reconociendo las reglas aplicadas y permisibles, reconocimiento de diferencias y semejanzas entre los significados, la forma de representar y la de leer los objetos algebraicos.

Palabras clave: Situaciones didácticas; Cálculo algebraico; Carrera Matemática – Física; Aprendizaje de ecuaciones

The work with significances in didactic learning situations of Algebra

ABSTRACT

This paper presents a study of the level of algebraic abilities achieved by students of the Mathematics- Physics major at the University of Guantánamo, based on the performances they possess regarding variables, equation and their respective concepts. Five didactic situations in Algebra are studied for this paper: the use of symbols and their significance, the use of the algebraic terms and their significance, algebraic calculation recognizing the applied and permissible rules, recognition of differences and similarities between significances, and the way to represent and read algebraic objects.

Key words: Didactic situations; Algebraic calculation; Mathematics – Physics major; Learning of equations

---

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de habilidades en la interacción con herramientas algebraicas es útil para los estudiantes en su vida diaria y para estudios posteriores en otras ramas de las ciencias o dentro de la Matemática misma, por ello tiene lugar la inclusión del Álgebra en los currículos escolares.

El modo en que se trata el Álgebra escolar no propicia que se fomente el pensamiento algebraico en los niveles deseados, se da prioridad a los procedimientos rutinarios, se conlleva a los estudiantes a la realización de cálculos desprovistos de razonamientos y son estos algoritmos los que más recuerdan y trasladan a los estudios superiores. Como regularidad, en materia de Álgebra, no es una exigencia la argumentación.

Normalmente cuando se escucha el término Álgebra, de inmediato se piensa en un conjunto de letras, números y operaciones separados por un signo de igualdad u otro símbolo, o apenas resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones, descubrir un valor desconocido, u otro tipo de actividades donde se utilicen incógnitas y letras. Estas perspectivas no se corresponden con las aspiraciones curriculares.

Si bien, el estudio del Álgebra está fuertemente vinculado a la manipulación simbólica y la resolución de ecuaciones, el trabajo algebraico es más que eso. Los alumnos necesitan formarse los conceptos algebraicos, las estructuras y principios que rigen las manipulaciones simbólicas y cómo estos símbolos pueden ser utilizados para traducir ideas matemáticas. Muchos de esos conceptos algébricos pueden ser construidos partiendo de las experiencias con números; además, el Álgebra está fuertemente vinculada a la Geometría y otras ramas de la Matemática.

Objetivo: Describir un conjunto de irregularidades que se manifiestan en la apropiación de habilidades algebraicas adquiridas, a través del estudio de algunas situaciones didácticas del dominio del Álgebra, en estudiantes que ingresan a la carrera Matemática - Física de la Universidad de Guantánamo, acompañada de sugerencias para su tratamiento.

Los análisis se realizaron en las direcciones siguientes: utilización de los símbolos provistos de su significado, uso de los términos algebraicos provistos de su significado, cálculo algebraico reconociendo las reglas aplicadas y permisibles, reconocimiento de las diferencias y semejanzas entre el significado, la forma de representación y la lectura, en los objetos algebraicos. Éstas, entre otras regularidades, necesitan ser tenidas en cuenta por los profesores y estudiantes que intervienen en el proceso de adquisición de habilidades algebraicas.

Para cumplir el fin propuesto se aplicó una encuesta exploratoria destinada a indagar sobre las representaciones de los estudiantes acerca del concepto de variable, ecuación, solución de una ecuación, procedimiento para resolver una ecuación, así como también para enunciar propiedades de las operaciones básicas del cálculo en dominios numéricos.

De una población de 39 estudiantes de la carrera Matemática - Física se tomó una muestra aleatoria de 12, correspondientes a los años tercero y cuarto, para un 30,8 %.

Los resultados obtenidos muestran que el 66,7 % no disponen de recursos algebraicos como herramienta útil en la resolución de problemas y que no hay avances notorios respecto a esto a lo largo de los años de la carrera. De ello se dedujo que en los aprendizajes primarios se produce una ausencia muy grande de significados, difícil de retomar cuando la interacción con las herramientas algebraicas adquiere una mayor dificultad operacional y por ello es en los momentos primarios de estudio del Álgebra donde se debe hacer fuerte el trabajo con los significados de los entes algebraicos.

DESARROLLO

El aprendizaje del Algebra

La utilización de los modelos en la enseñanza de la Matemática contribuye a aprenderla significativamente, propiciándole un ambiente que tenga algo que ver con su realidad y experiencia en esta actividad. La Matemática es considerada por algunos autores (Devlin, K. 2002) como la ciencia de analizar y sintetizar modelos, atribuyéndole a los mismos su esencia y el lenguaje en el cual es expresada. El uso de los modelos está dirigido al apoyo de la cognición de los estudiantes para que puedan descubrir relaciones, encuentren conexiones, hagan generalizaciones y también previsiones.

Los profesores de Matemática en Cuba están conscientes del hecho de que hay, por un lado, menos intereses en la Matemática y, por otro, un descenso en las capacidades matemáticas de los estudiantes. Infelizmente, tal vez, porque muchos alumnos ven a la Matemática como una mera colección de procedimientos a aprender. Como Devlin refiere:

> (...) A lo largo de los años la Matemática se tornó cada vez más complicada, las personas se concentran cada vez más en los números, fórmulas, ecuaciones, métodos, y perdieron de vista lo que son realmente aquellos números, fórmulas y ecuaciones y por qué es que se realizan aquellos métodos. No consiguen entender que la Matemática no es apenas manipulación de símbolos de acuerdo con reglas arcaicas mas sin la compresión de modelos — modelos de la naturaleza, modelos de la vida, modelos de la belleza. (Devlin, 2002, p. 206)

El Álgebra puede ser definida como un sistema matemático utilizado para generalizar algunas operaciones matemáticas, permitiendo que letras u otros símbolos sustituyan los números. Es parte de esta idea Tall (1992) donde expresa que el Álgebra es muchas veces vista como "la generalización de la Aritmética" partiendo de la búsqueda de modelos numéricos.

Una idea que deviene de estas afirmaciones sobre el Álgebra es la de generalización, lo que conlleva a verla como uno de los elementos integrantes del pensamiento matemático. La generalización surge como reconocimiento de los modelos, relaciones y el análisis de estas relaciones. Como refieren los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) los modelos son la base del pensamiento algebraico y el trabajo con modelos convida a los estudiantes a identificar relaciones y hacer generalizaciones.

Las habilidades algebraicas están estrechamente vinculadas a la aritmética. Este hecho tiene dos aristas: por un lado el conocimiento aritmético es indispensable para el uso del Álgebra, pero por otro lado, hay que tener muy presente en los momentos en que los primeros pueden resultar un obstáculo para los segundos.

Un análisis de las distintas vías de entrada al Álgebra debe precisar cuál es, para cada uno de los objetos algebraicos, el punto en el que la aritmética se vuelve insuficiente y surge la necesidad del Álgebra.

Un ejemplo de ello lo muestra el hecho de que las propiedades aritméticas requieren del Álgebra para ser formuladas de modo general, ya que se hace necesaria la introducción de variables bajo la acción de los cuantificadores, donde se establece la obligatoriedad de recorrer todo el dominio numérico en estudio. En esta dirección los estudiantes no perciben la necesidad de introducir variables.

Ahora bien, esto no funciona de la misma manera para cualquier propiedad. Se trata más bien de aquellas que los estudiantes vienen utilizando desde muy pequeños y cuya formulación simbólica no les aporta nueva información. Este argumento hace pensar que, presentar al lenguaje algebraico como una formalización de un conocimiento que ya se tiene, no va a contribuir a la construcción del mismo. Es necesario que de entrada aparezca como una herramienta que permita saber cosas nuevas.

En relación a esto último Nicolina Malara (1994) propone un trabajo temprano con las letras alrededor de formulaciones y demostraciones en aritmética. El estudio de las propiedades aritméticas puede comenzar con la observación de regularidades numéricas sobre un limitado número de casos y la formulación de la regularidad observada en término generales. El análisis de la validez de las formulaciones obtenidas abre las puertas para un trabajo sobre el rol de los ejemplos, los contraejemplos, y en general sobre las argumentaciones que permiten establecer el valor de verdad de una fórmula. L. Gherpelli y N. Malara (1994) relatan detalles de una experimentación en tal sentido.

La problemática específica del aprendizaje de ecuaciones exige indagar acerca de los procedimientos que los estudiantes ponen en juego frente a su resolución. A partir de la clasificación de los errores que cometen los estudiantes al resolver ecuaciones lineales, A. Cortés (1994) identificó ciertas invariantes operatorias que los estudiantes deben construir en su proceso de aprendizaje: la conservación de la igualdad, el control algebraico de la validez de la transformación y la elección de la operación aritmética prioritaria.

Irregularidades en la utilización de herramientas algebraicas

1. Es identificado como lo mismo, una propiedad de la aritmética y un ejemplo concreto de esa ley:

Si se pregunta por ejemplo ¿Por qué podemos afirmar que la adición es conmutativa en el dominio de los números naturales? Las respuestas más comunes tienen como esencia presentar un caso concreto, es decir, aparecen respuestas como la siguiente – porque $5+3=3+5$, para ellos $\forall a,b \in \mathrm{N}\ a+b=b+a$, no difiere de la expresión anterior. En este caso se refleja el carácter general que los estudiantes suelen atribuir a un ejemplo, cuando se tratan de leyes aritméticas con las que ellos vienen interactuando desde los primeros grados. La formulación simbólica no les aporta ninguna información nueva. Este hecho se lleva incluso hasta el estudio de las estructuras algebraicas, cuando al tener que argumentar sobre las estructura de cierto dominio numérico ya conocido, se dificulta la argumentación, manteniendo la tendencia a la concretización de las propiedades. Para esa altura, es fácil reconocer, por ejemplo, que en el dominio de los números enteros, el simétrico aditivo de 4 es -4, pero una pregunta como esta ¿Cuál será la forma del simétrico de un elemento **a** cualquiera, bajo las mismas condiciones? queda sin respuesta. No otorgan a las letras ningún uso específico, si no más bien un status superior, una mayor complejidad. Las letras aparecen asociadas a la dificultad, al punto donde el trabajo en la clase de Matemática se torna incomprensible y ajeno.

Se sugiere que en la formulación de las propiedades de la aritmética se destaque la introducción de las variables, el significado del uso de los cuantificadores, ilustrar con ejemplos, casos concretos de estas leyes de modo que no de lugar a una identificación.

2. El concepto de ecuación es identificado como una igualdad que contiene variables:

Sin hacer conjeturas respecto a los tipos de situaciones que se pueden presentar para los posibles valores de la variable en el dominio de definición. Esta situación trae consigo sorpresa en los estudiantes cuando al tratar de encontrar la solución de una supuesta ecuación, se le “pierde” la variable, bien porque la igualdad primaria se le transforma en una contradicción o también en una igualdad válida que no depende de los valores de la variable. Al presentar a los estudiantes una lista de expresiones matemáticas para que de ellas sean identificadas las que son ecuaciones, es común identificar a expresiones como las siguientes: $( )\, 4x+5=3x+x+2$ (1), (2) $(x+1)^2+3=x^2+2x+4$, como representante del concepto de ecuación, pero el problema se presenta cuando la orden de la tarea continúa diciendo que resuelvan las que hayan sido identificadas, ya que en los caso del primer tipo queda una igualdad falsa $(5=2 \;\; ó \;\; 3=0)$ de la forma $b=0$ con $b\neq 0$ en fin una expresión contradictoria; es este el momento de inquietud en los estudiantes cuando comienzan a preguntarse a ellos mismos, ¿Qué ha pasado?, ¿Dónde está la variable?, piensan que tuvieron algún error de cálculo, o que el profesor se equivocó, tratan de rectificar una u otra cosa, surgen muchas inquietudes al “quedarse sin variable”. Es claro que esto es una muestra que desde un momento inicial no se tiene claridad del significado de la expresión matemática en su conjunto y por consiguiente del significado del proceso de resolución.

En caso como se muestra en la expresión (2), el análisis es similar, con la diferencia de la tipología de los valores sobre el dominio prefijado, y que ya se trata de otro concepto, el de identidad, el cual hay que diferenciarlo de ecuación y hacer énfasis en cuál es el significado de la expresión original cuando en el intento de transformarla aparece una igualdad válida que no depende de la variable. En este sentido hay tres direcciones: El no reconocimiento del significado del concepto de ecuación, el no reconocimiento de ecuaciones falsas y confusión con identidad y ecuación.

Esta irregularidad entorpece, por ejemplo, en el Álgebra Lineal al resolver sistema de ecuaciones lineales por el método de **Eliminación de Gauss**, donde aparecen estos tipos de igualdades y que están estrechamente vinculados a los conceptos de sistemas compatibles e incompatibles.

Se sugiere que la orden del ejercicio lleve implícito la determinación de uno de los tres tipo de situación que se presenta en la expresión matemática original dada, es decir, el significado de la expresión: que existen ciertos valores de la variable (o ninguno) tomado de un dominio prefijado, para los cuales al ser sustituidos en la expresión, ésta se transforma en una igualdad cierta - proposición verdadera, diferenciar en este caso si son todos los valores del dominio o algunos, (o no existen los valores que representa la expresión y por lo tanto ésta, en el intento de encontrar los supuestos valores, se transforma en una igualdad falsa, mostrando que la expresión original es una igualdad falsa – proposición falsa, contradicción.

3. Existe tendencia a la búsqueda de la solución de la ecuación, independientemente a la orden del ejercicio. Es mal interpretado el concepto de ecuación y solución de una ecuación:

Cuando un ejercicio tiene la orden “Comprueba que ciertos elementos son soluciones de una ecuación dada”, el proceder se reduce a transformar la ecuación, encontrar la solución y comprobar que los valores obtenidos son los mismos que los que habían sido dados. No hay una tendencia a reemplazar el valor numérico dado en la ecuación para comprobar si se obtiene una igualdad cierta.

Se sugiere que se incluyan ejercicios cuya orden obligue a sustituir los valores en la expresión sin transformarla, es decir, para utilizar directamente el concepto de solución de una ecuación.

4. Existen confusiones al encontrar solución de una ecuación por reflexiones lógicas, aplicando directamente el concepto:

Cuando se le pide encontrar una solución particular de una ecuación lineal de dos variables, por ejemplo, al pedir que escriban una solución de la ecuación $4x+3y=10$, casi ningún estudiante puede obtenerla. Algunos de ellos "agregan" otra ecuación lineal y resuelven el sistema. Si bien los estudiantes han estudiado sistemas lineales indeterminados, no pueden reconocer que las infinitas soluciones de un sistema indeterminado de dos ecuaciones son también solución de cada ecuación. Nuevamente se hace evidente la falta de recursos de los estudiantes frente a tareas para las cuales los procedimientos automáticos que aprendieron no resultan adecuados.

Se sugiere guiar la orden del ejercicio a la aplicación del concepto solución de una ecuación.

5. La incorrecta interpretación del significado “resolver una ecuación” tiene otras formas de manifestaciones, existe una fuerte tendencia a transformar la ecuación en otra más simple sucesivamente hasta poder decidir qué pasa con los valores de la variable.

Es comprendido, con frecuencia “Resolver una ecuación” como el hecho de encontrar la solución sin tener en cuenta que puede no existir valores de la variables que hagan cierta la igualdad en el dominio de definición.

Cuando se da una lista de ecuaciones con el objetivo de resolverlas, y en la cual aparece alguna de la forma $x=a$, por ejemplo $x=5$, la respuesta obtenida es que esta ecuación no se puede transformar y por tanto no tiene solución.

Al presentar un caso como este $(x+2)^2=-4$ la mayor tendencia es a desarrollar el cuadrado del binomio, transponer y reducir términos hasta obtener un trinomio, el cual es sometido a ciertos tanteos para descomponerlo en factores, hasta que finalmente; analizando el discriminante obtienen como resultado que esta ecuación no tiene solución real.

La dificultad radica en que se pierde de vista el objetivo del proceso, si se tiene en cuenta que la finalidad es encontrar los valores de las variables que hacen cierta la igualdad presente en la expresión dada, o comprobar que estos no existen.

Se sugiere que en la dirección del proceso se reflexione sobre la necesidad o no de transformar la expresión para cumplir el objetivo. Una secuencia de preguntas para tales efectos son las siguientes: ¿Para qué hay que transformar?, ¿Cuándo es necesario?,

¿Siempre es necesario?, ¿Existen casos en que no es necesario?, ¿Siempre tiene ventaja para el logro del objetivo?, ¿Qué tipo de objeto es la expresión anterior por su forma?, ¿Qué significado tiene esa expresión?, ¿Existe algún valor de la variable que haga cierta la igualdad expresada?, ¿Por qué?

Es necesario desde el punto de vista didáctico que en la interacción con los objetos algebraicos se establezcan las semejanzas y diferenciaciones entre la forma de representar el objeto, el significado de los símbolos que intervienen en la representación, así como el significado del objeto mismo, además de la lectura de los símbolos involucrados.

La mayoría de los objetos algebraicos se definen a partir de su forma, por ejemplo: término, polinomio, ecuación, inecuación, fracción algebraica, pero de todos modos ellos como objeto tienen un significado, que no siempre coincide con el modelo que lo representa.

Si se toma como ejemplo el objeto ecuación, se observa que es casi general confundir el concepto con la forma de representarlo, a la pregunta: ¿Qué es una ecuación?, la mayoría responden – Es una igualdad que contiene por lo menos una variable, cuando en realidad, esto constituye más bien la forma de representar a una ecuación, sin embargo, el rasgo característico de este objeto “satisfacerse para cierto valores de la variable, o para ninguno” es omitido.

6. Existe una tendencia generalizada a la realización de cálculos algebraicos “ciegos” desprovistos de significados:

Cuando a un estudiante se le indica que resuelva una ecuación (sobre todo si es algo complicada que requiere de transformaciones menos comunes como la fraccionaria o irracional,…, etc.) , muchos de ellos estarían en disposición de hacerlo, pero si se le agrega a la orden del ejercicio que identifique en cada paso dado, la transformación que ha sido aplicada, y también el argumento de: ¿Por qué fue posible hacerlo?, surge la negativa, ya no aparece quien tenga disposición. Ahora la situación se torna diferente, las repuestas son: “yo sé hacerlo, pero no sé decirlo, “nunca lo he hecho así”, “así es muy difícil”.

En este aspecto se manifiesta cómo el aprendizaje del cálculo algebraico carece de fundamentos, no hay aprendizaje de propiedades, leyes, condiciones de aplicabilidad, etc. no hay razonamiento en cuanto a: ¿Por qué se conserva la igualdad cuando se hace una transformación elemental?, ¿Bajo qué condiciones se puede hacer una transformación?,

¿Cuál transformación se puede hacer y cuál no?, ¿Qué significado tiene que la igualdad se conserve?

De modo general no son atendidos al nivel deseado la aplicación de las invariantes: conservación de la igualdad, el control algebraico de la validez de la transformación y la elección de la operación aritmética prioritaria.

Otro modo de manifestarse la irregularidad anterior es en la compresión del concepto de ecuaciones equivalentes, mayormente se reconoce a dos ecuaciones equivalentes como aquellas que tienen las mismas soluciones, por lo que para mostrar si dos ecuaciones son equivalentes el método común es comprobar que ambas tienen las mismas soluciones, a partir de encontrar la solución de una de ellas y probar que son las únicas soluciones de la otra, o también procurar las soluciones de cada una y verificar que son las mismas. En esta misma dirección no se hacen conjeturas sobre las transformaciones aplicadas y sobre las implicaciones de estas en la ruptura o conservación de la equivalencia entre las ecuaciones implicadas.

Por ejemplo, al analizar si las ecuaciones (1) $x^2+3=4x$ y (2) $x^2+3+\frac{1}{x-1}=4x+\frac{1}{x-1}$ son equivalentes, el procedimiento más común es tratar de resolver aplicando transformaciones, no es habitual hacer conjeturas sobre las transformaciones que de una ecuación lleva a la otra, en este caso sería fácil ver que, la ecuación (1) es obtenida de la ecuación (2) por sustracción en ambos miembros de la igualdad la expresión algebraica fraccionaria $\frac{1}{x-1}$, lo cual insta a pensar que pueden no ser equivalentes pues esta transformación no siempre conserva las raíces.

CONCLUSIONES

El tratamiento inadecuado del aprendizaje primario del Álgebra trae como resultado la formación de procedimientos rutinarios en los estudiantes, sin fomentar el pensamiento algebraico, promoviendo cálculos desprovistos de razonamientos, perdurando una algoritmia que obstaculiza los estudios superiores.

Los estudiantes que ingresan a la carrera de Matemática – Física tienen dificultades para: enunciar propiedades de las operaciones de cálculo en los dominios numéricos, aplicar los conceptos de ecuación y solución de una ecuación, también para identificar reglas permisibles en el proceso resolutivo de una ecuación.

El tratamiento a situaciones didácticas del aprendizaje del Álgebra debe realizarse atendiendo al lenguaje de los símbolos que representan los objetos, a su significado, y a las reglas operacionales aplicables a ellos, de modo que se potencie el pensamiento algebraico.

BIBLIOGRAFÍA

1. Cortés, A. [on line]. Definición cognitiva: invariantes operacionales de la resolución de ecuaciones, 1994. Disponible en : http://www.project2061.org/publications/articles/textbook/hsalg/criteria.htm. Consultado : 25 de febrero de 2014.
2. Cortés,A, Vergnaud,G , Kavafian,N. [on line]. La aritmética y el Álgebra : la negociación de una ruptura, 1990. Disponible en : http://www.project2061.org/publications/articles/textbook/hsalg/criteria.htm, Consultado : 25 de febrero de 2014.
3. Devlin, K. Matemática: a ciência dos padrões. Porto: Porto Editora. 2002.
4. Gherpelli, L. and Malara, N. Argumentaciones en aritmética. Dip. de Mat. Univ. de Modena. Oral Comunication in SFIDA '94 , Nice, Francia. 1994.
5. NCTM. Principles and Standards for School Mathematics. Reston: NCTM. 2000. [on line]. Disponible en : http://www.alamut.com/notebooks/p/patterns.html. Consultado : 22 de marzo de 2014.
6. Tall, D. The transition from arithmetic to algebra: number patterns or proceptual programmming? *New Directions in Álgebra Education*, (pp. 213-231). Brisbane: Queensland University of Technology, 1992.